

ENONCE :

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la somme :

$$s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3.$$

En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $s_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

Éléments de correction

$$s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3.$$

Considérons la propriété : $\mathcal{P}_n$: « $s_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$ ».

- $\mathcal{P}_1$ est vraie car $s_1 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2} \right)^2$.

- Supposons que $\mathcal{P}_p$ soit vraie pour un entier naturel $p \geq 1$. Alors $s_p = \left(\frac{p(p+1)}{2} \right)^2$.

$$\begin{aligned} s_{p+1} &= s_p + (p+1)^3 = \left(\frac{p(p+1)}{2} \right)^2 + (p+1)^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3 = \frac{p^2(p+1)^2 + 4(p+1)^3}{4} \\ &= \frac{(p+1)^2(p^2 + 4(p+1))}{4} = \frac{(p+1)^2(p^2 + 4p + 4)}{4} = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4} = \left[\frac{(p+1)(p+2)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie . La propriété est héréditaire .

CONCLUSION : Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie .